

Exakte Behandlung eines Maser-Modells

Von E. ABATE und H. HAKEN

Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. **19 a**, 857—861 [1964]; eingegangen am 18. März 1964)

We treat the interaction of a single cavity mode with a system of atoms, all with the same transition frequency which is assumed equal to the frequency of the mode. The mode and the atoms are assumed to have infinite lifetime, when not coupled together. By a machine calculation the time variation of the number of photons is determined, taking into account up to 80 atoms. The photon number oscillates as a function of time. The results are compared with those of approximate methods used by SERBER and TOWNES and FRISCH and HAKEN. Finally a new semiclassical treatment of the equations of motions is given, which is capable of showing the oscillations of the photon number.

Die vorliegende Arbeit entstand aus einer theoretischen Untersuchung des Einschaltvorganges des Lasers¹ (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Während man es beim Laser mit der Wechselwirkung eines atomaren Systems mit sehr vielen Lichtwellen zu tun hat, tritt beim entsprechenden Problem des Masers (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation)² nur eine einzige elektromagnetische Schwingung als Wechselwirkungspartner der Atome auf.

Bei der theoretischen Behandlung des Lasers liegt es daher nahe, auf die Methoden des mathematisch wesentlich einfacheren Maser-Falls zurückzugreifen. Wie das Literaturstudium ergab, gibt es zwar mehrere solcher Näherungsmethoden, jedoch wurden sie nie näher auf ihren Genauigkeitsgrad hin untersucht. Auch fehlten bislang exakte Modellrechnungen, aus denen man etwa den Zeitverlauf der Lichtintensität hätte ersehen können. Als ein solches Modell bietet sich das folgende an, das auch schon im Rahmen von Näherungsrechnungen u. a. von SERBER und TOWNES³ verwendet wurde.

1. Der Modell-Hamilton-Operator

Wir betrachten eine einzige Schwingung mit der Frequenz ω und unendlicher Wellenlänge⁴. Der zugehörige Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator sei b^+ bzw. b . Daneben existiere ein System von N

Atomen an beliebigen Gitterpunkten, die sämtlich die gleiche Anregungsenergie $\hbar\omega$ haben. Der Erzeugungsoperator für ein Elektron am Atom μ im Grundzustand sei $\alpha_{\mu,1}^+$, derjenige für den angeregten Zustand $\alpha_{\mu,2}^+$.

Bezeichnet noch g die Kopplungskonstante zwischen der elektromagnetischen Schwingung und einem Atom, so lautet der HAMILTON-Operator

$$\hbar\omega b^+ b + \hbar\omega \sum_{\mu} \alpha_{\mu,2}^+ \alpha_{\mu,2} + g \sum_{\mu} (\alpha_{\mu,1}^+ \alpha_{\mu,2} b^+ + b \alpha_{\mu,2}^+ \alpha_{\mu,1}). \quad (1)$$

In ihm sind Glieder der Form

$$\alpha_{\mu,1}^+ \alpha_{\mu,2} b \text{ und } \alpha_{\mu,2}^+ \alpha_{\mu,1} b^+$$

wegelassen worden, da diese mit sehr rasch oszillierenden Faktoren (in der Wechselwirkungsdarstellung) behaftet sind. (1) stellt unseres Modell-HAMILTON-Operator dar.

Sowohl für die exakte Behandlung als auch für einige Näherungsmethoden ist es günstiger, in (1) neue Elektronenoperatoren einzuführen, die den gesamten Anregungsvorgang beim Atom μ beschreiben: $\alpha_{\mu}^+ = \alpha_{\mu,2}^+ \alpha_{\mu,1}$ und entsprechend für den entgegengesetzten Vorgang: $\alpha_{\mu} = \alpha_{\mu,1}^+ \alpha_{\mu,2}$. Nach kurzen Umformungen lässt sich dann (1) in folgender Weise schreiben:

$$\hbar\omega b^+ b + \hbar\omega \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^+ \alpha_{\mu} + g \sum_{\mu} (b^+ \alpha_{\mu} + b \alpha_{\mu}^+). \quad (2)$$

⁴ Es wäre genauso einfach, eine laufende Welle mit endlicher Wellenlänge zu benutzen. Durch die Transformation $\alpha_{\mu} \rightarrow \alpha_{\mu} \exp(i k r_{\mu})$ der Operatoren für den atomaren Übergang kann man dann sofort auf den Fall unendlicher Wellenlänge zurücktransformieren. r_{μ} ist der jeweilige Atomort, k der Ausbreitungsvektor der elektromagnetischen Welle.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) geplant, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Die α_μ genügen dabei den Vertauschungsrelationen $\alpha_\mu \alpha_\nu - \alpha_\nu \alpha_\mu = 0$, $\alpha_\mu \alpha_\nu^+ - \alpha_\nu^+ \alpha_\mu = 0$ für $\nu \neq \mu$ und $\alpha_\mu \alpha_\mu^+ + \alpha_\mu^+ \alpha_\mu = 1$.

Diese Vertauschungsrelationen werden aber auch von den bekannten Spinoperatoren

$$\sigma_\mu^+ = \sigma_{x,\mu} + i\sigma_{y,\mu} \text{ und } \sigma_\mu^- = \sigma_{x,\mu} - i\sigma_{y,\mu} \text{ (mit } \hbar = 1)$$

erfüllt. Dies legt es nahe, zu Operatoren überzugehen, die sich auf den Gesamt „spin“ beziehen:

$$S^+ = \sum_\mu \alpha_\mu^+, \quad S^- = \sum_\mu \alpha_\mu, \quad 2S_z = S^+ S^- - S^- S^+.$$

Gehen wir gleichzeitig noch zur Wechselwirkungsdarstellung über, so lautet die SCHRÖDINGER-Gleichung schließlich:

$$\{g b^+ S^- + g b S^+\} \psi = -\frac{\hbar}{i} \dot{\psi}. \quad (3)$$

Da die Gesamtzahl von Photonen und angeregten Zuständen $b^+ b + \sum_\mu \alpha_\mu^+ \alpha_\mu$ eine gute Quantenzahl ist, genügt es, ψ in die folgende Reihe zu entwickeln:

$$\psi = \sum_n c_n(t) \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}} N_n (S^-)^n \psi_0, \quad (4)$$

wobei N_n die Wellenfunktion $(S^-)^n \psi_0$ normiert.

Im folgenden nehmen wir für den Anfangszustand an, daß alle Atome im angeregten Zustand sind und kein Photon vorhanden ist. Wir erhalten dann, daß ψ_0 mit diesem Zustand identisch ist, und daß gilt:

$$c_0(0) = 1, \quad c_n(0) = 0 \quad \text{für } n \geq 1. \quad (5)$$

Setzen wir unter diesen Voraussetzungen (4) in (3) ein, multiplizieren mit $((b^+)^n (S^-)^n \psi_0)^*$ und bilden den Erwartungswert, so erhalten wir für die c_n das folgende Gleichungssystem:

$$c_{n-1} n \sqrt{N+1-n} + c_{n+1} (n+1) \sqrt{N-n} = i \dot{c}_n. \quad (6)$$

In (5) wurde die Zeiteinheit so gewählt, daß $\hbar/g = 1$ wird.

2. Die exakte Behandlung

Das Gleichungssystem (6) wurde unter den Randbedingungen (5) auf einer Rechenmaschine IBM 704 vom Deutschen Rechenzentrum gelöst. Die Rechnungen wurden von Herrn H. MAIER durchgeführt. Dabei wurden zuerst die Eigenvektoren und Eigenwerte von (6) für die Beispiele $N = 5, 10, 15, 39, 70, 80$ bestimmt und daraus die Photonenanzahl

$$\langle \psi^* b^+ b \psi \rangle = \sum_{n>0} n |c_n(t)|^2$$

gewonnen. Die Ergebnisse für $N=80$, die auch für die anderen Fälle typisch sind, sind in den Abb. 1 und 2 dargestellt. Es ergibt sich näherungsweise eine Oszillation der Photonenanzahl mit einer bestimmten, von N abhängigen Periode. Das System aus elektromagnetischer Schwingung einerseits und den Atomen andererseits verhält sich also qualitativ ganz ähnlich wie zwei gekoppelte Pendel.

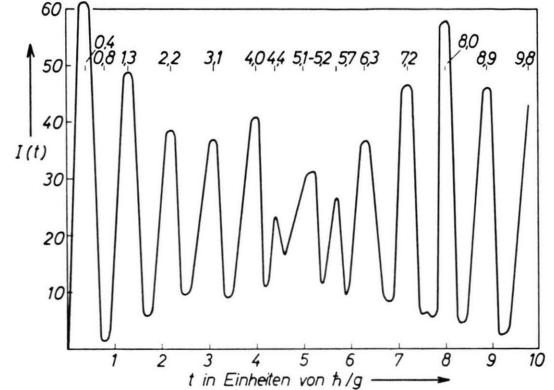


Abb. 1. Verlauf der Photonenanzahl $I(t)$ für $N=80$ zwischen $t=0$ und $t=10 \hbar/g$ (exakte Rechnung).

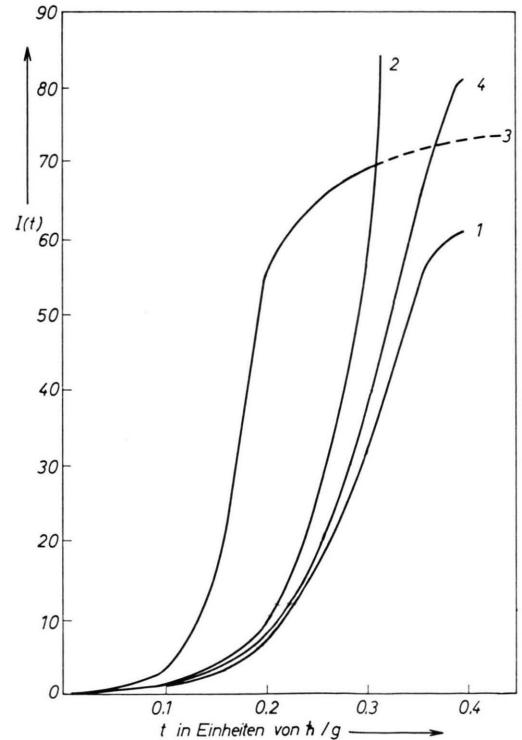


Abb. 2. Verlauf der Photonenanzahl $I(t)$ für $N=80$ zwischen $t=0$ und $t=t_{\max}$. Kurve 1: exakte Rechnung, 2: Näherung von SERBER und TOWNES, 3: Näherung von Abschnitt 3c, 4: Näherung von Abschnitt 4.

3. Näherungsmethoden für den Einschaltvorgang

a) Die Methode von SERBER und TOWNES³

Diese Autoren gehen ebenfalls vom HAMILTON-Operator (1) aus. Da die Atome in dem vorliegenden Modell identische Eigenschaften haben und die Elektronen ununterscheidbar sind, kann man einen allgemeinen Besetzungszustand des atomaren Systems auch so beschreiben, daß der Grundzustand N_1 -fach und der Anregungszustand N_2 -fach besetzt sind. Es liegt daher nahe, die Elektronenwellenfunktion im Rahmen der 2. Quantelung anzusetzen als $\psi(\mathbf{r}) = \alpha_1 \varphi_1(\mathbf{r}) + \alpha_2 \varphi_2(\mathbf{r})$. φ_1 und φ_2 sind dabei die Wellenfunktion für den atomaren Grund- bzw. Anregungszustand, während α_1 und α_2 quantisierte Amplituden sind, die den Bose-Vertauschungsrelationen genügen, da n gleiche Teilchen im gleichen Zustand sitzen dürfen. Mit Hilfe der eben eingeführten quantisierten Wellenfunktion können SERBER und TOWNES den HAMILTON-Operator (1) dann in folgender Weise schreiben:

$$H = \hbar \omega b^+ b + \hbar \omega \alpha_2^+ \alpha_2 + g b^+ \alpha_1^+ \alpha_2 + g b \alpha_2^+ \alpha_1. \quad (7)$$

Die atomaren Wellenfunktionen $\varphi(\mathbf{r})$ gehen dabei in das Matrixelement g ein. Bei der nun folgenden Untersuchung des Einschaltvorganges nehmen die Autoren an, daß zu Anfang alle Atome angeregt sind. Vernachlässigt man die Änderung der Besetzungszahl des oberen Zustands während der Photonenenerzeugung, so kann man den Operator α_2 durch \sqrt{N} ersetzen⁵. Dies ist die wesentliche Näherung von SERBER und TOWNES, die aus (7) einen bilinearen HAMILTON-Operator macht, der (bei Benutzung der Wechselwirkungsdarstellung) unmittelbar auf die beiden Bewegungsgleichungen führt:

$$\dot{b}^+ = i \alpha_1^+ \sqrt{N}, \quad \dot{\alpha}_1^+ = i b^+ \sqrt{N}. \quad (8 \text{ a, b})$$

Wegen der Einzelheiten der Rechnung verweisen wir auf die Arbeit von SERBER und TOWNES. Mit Hilfe der Lösungswellenfunktion haben wir die Photonenzahl berechnet und in die Abb. 2 eingetragen. Innerhalb des ersten Anstiegs ergibt sich also trotz der Näherung eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der exakten Rechnung. Da die obere Besetzungszahl aber konstant gehalten wird, steigt dann die Photonenzahl unbegrenzt an.

⁵ Diese Näherung bedeutet, auf Gl. (6) angewendet, daß man dort $\sqrt{N}+1-n$ und $\sqrt{N}-n$ durch \sqrt{N} approximiert.

b) Die Methode von FAIN und KHANIN⁶

Diese, auch von anderen Autoren benutzte Methode ist inhaltlich mit der von SERBER und TOWNES identisch, sieht aber formal etwas anders aus, so daß wir sie hier noch anführen. Ausgangspunkt ist der HAMILTON-Operator (2) bzw. (3), der zu folgenden Bewegungsgleichungen führt, wobei wieder $\hbar/g=1$ gesetzt ist:

$$\dot{b}^+ = i S^+, \quad \dot{S}^+ = -i b^+ 2 S_z. \quad (9 \text{ a, b})$$

Berücksichtigen wir, daß $2 S_z = N_2 - N_1$ ist, so können wir für kleine Zeiten wieder $2 S_z$ durch N ersetzen. Damit sind die Gln. (8) wiederum linear und geben den gleichen Verlauf für die Photonenzahl wie die Methode von SERBER und TOWNES. Dies ergibt sich unmittelbar daraus, daß sich S^+/\sqrt{N} und S^-/\sqrt{N} in der gemachten Näherung für S_z wie Bosonenoperatoren α^+ und α verhalten und damit die Gln. (9) unmittelbar in die Gln. (8) übergehen. Damit wird übrigens der des öfteren gegen die Arbeit von SERBER und TOWNES erhobene Einwand entkräftet, daß durch die Einführung der quantisierten Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r})$ die Statistik nicht richtig berücksichtigt wird.

c) Eine Methode zur Abschneidung der Photonenzahl

In den bisher besprochenen Näherungsmethoden wächst die Photonenzahl unbegrenzt an, ganz im Widerspruch zur exakten Rechnung. Von FRISCH und HAKEN⁷ wurde deshalb ein anderes Näherungsverfahren im Falle des Lasers entwickelt, das automatisch ein Abschneiden der Photonenzahl liefert.

Wenn wir dieses Verfahren auf den Fall nur einer Schwingung und exakte Resonanz spezialisieren, so lautet die Näherung wie folgt:

Die Lösung der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung läßt sich bekanntlich in der Form

$$\psi(t) = \exp\{-i H t / \hbar\} \psi_0$$

schreiben, wobei ψ_0 die Wellenfunktion des Anfangszustandes ist. In der Wechselwirkungsdarstellung läßt sich H wegen der vollständigen Resonanz zwischen dem atomaren System und der elektromagnetischen Schwingung in der Form $b^+ \sum_{\mu} \alpha_{\mu} + b \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^+$ schreiben. Gehen wir von einem Anfangszustand aus, bei dem alle Atome angeregt sind, so sorgt der erste

⁶ V. M. FAIN u. Ya. J. KHANIN, Soviet Phys.-JETP **14**, 1069 [1962].

⁷ H. FRISCH u. H. HAKEN, Vorabdruck.

Summand b^+ für die reellen Prozesse, während der zweite Summand (mit Hilfe des ersten Summanden) zu virtuellen Prozessen führt. Wie man in Weiterführung dieser Argumentation zeigen kann, dürfen wir als Näherungswellenfunktion ansetzen:

$$\psi(t) = h(t) \exp\left\{-i(b^+ \sum_{\mu} \alpha_{\mu}) t\right\} \psi_0,$$

wobei $h(t)$ noch aus der Normierung zu bestimmen ist. Mit Hilfe dieser Wellenfunktion ergibt sich die Photonenzahl $n(t)$ zu⁸

$$n(t) = \frac{d}{d\beta} \ln g|_{\beta=1}$$

$$\text{mit } g = 1 + \sum_{n=1}^N N(N-1)\dots(N-n+1) \beta^n t^{2n}.$$

Die numerischen Ergebnisse sind in Abb. 2 dargestellt. Wie man erkennt, steigt die Photonenzahl bei dieser Näherung etwa in der halben Zeit wie bei der exakten Rechnung an. Jedoch biegt die Photonenzahl bei dem richtigen Maximalwert ab. Die dann einsetzenden Oszillationen werden jedoch auch hier nicht erfaßt. Dies liegt daran, daß der Näherungsansatz für die Wellenfunktion nur die Photonenproduktion, nicht aber die Photonenvernichtung enthält.

4. Eine Näherungsmethode für den Oszillationsvorgang

Die in Abschn. 3 besprochenen Näherungsmethoden sind, wie wir sahen, nicht in der Lage, die zeitliche Oszillation der Photonenzahl wiederzugeben. Das liegt, wie besonders die Methoden (3 a) und (3 b) deutlich erkennen lassen, daran, daß die Entleerung der oberen Niveaus nicht berücksichtigt wird.

Wir geben daher eine neue Näherungsmethode an, die die Abnahme der Besetzungszahl des oberen Atomniveaus in Rechnung stellt. Dazu gehen wir von den Gln. (9) aus. Differenzieren wir die erste nochmals nach der Zeit und setzen sie in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir

$$\ddot{b}^+ = b^+ 2 S_z. \quad (10)$$

Berücksichtigen wir noch den Erhaltungssatz

$$S_z + b^+ b = N/2,$$

so können wir statt (10) schreiben:

$$\ddot{b}^+ = b^+ (N - 2 b^+ b). \quad (11)$$

⁸ Die detaillierte Rechnung ist für diesen Fall durchgeführt von FRISCH und HAKEN⁷.

Unsere Näherungsmethode besteht nun in folgendem: Für große Photonenzahlen wird man den Grenzübergang zu einer klassischen Beschreibung vollziehen können. Wir dürfen dann \dot{b}^+ durch seinen Erwartungswert ersetzen. Dementsprechend behandeln wir (11) als eine klassische Bewegungsgleichung. Multiplizieren wir (11) mit b und addieren links und rechts die konjugiert komplexen Ausdrücke, so erhalten wir sofort

$$b^+ \dot{b} = b^+ b (N - b^+ b) + C. \quad (12)$$

Wie eine eingehendere Diskussion zeigt, darf man die Phasen von b und b^+ als zeitunabhängig ansetzen. Mit $b = f \cdot e^{i\varphi}$ (f reell) ergibt sich dann

$$f^2 = f^2 (N - f^2) + C$$

oder, nach Separation der Variablen,

$$t = \int_0^f \frac{df}{\sqrt{f^2(N-f^2)+C}}. \quad (13)$$

Die Konstante C ist durch die Anfangsbedingung für $t=0$ festzulegen. Hier entsteht die Schwierigkeit, daß bei kleinen Zeiten nur wenige Quanten vorhanden sind und wir daher nicht ohne weiteres klassisch rechnen dürfen.

Wir können diese Schwierigkeit jedoch umgehen, wenn wir für $f^2 = b^+ b$ den Erwartungswert einsetzen, der sich bei kleinen Zeiten noch exakt aus der Rechnung von SERBER und TOWNES¹ bestimmen läßt, und zwar ergibt sich $\langle b^+ b \rangle = N$.

Damit ist das elliptische Integral (13) vollständig festgelegt. Für kleine Zeiten kann man f^2 gegen N unter der Wurzel vernachlässigen und wir erhalten für $f^2(t)$ genau den gleichen Ausdruck für die Photonenzahl wie SERBER und TOWNES:

$$f^2 = n = \operatorname{Si}^2(\sqrt{N} \cdot t).$$

Für große Zeiten erwarten wir jedoch Abweichungen von diesem Gesetz. Wie sich aus der Nullstelle der Wurzel in (13) ergibt, nimmt f^2 als Maximalwert

$$f_{\max}^2 = \frac{1}{2} N + \frac{1}{2} \sqrt{N^2 + 4N} \approx N + 1 \text{ an.}$$

Dieses Ergebnis mutet insofern zunächst etwas sonderbar an, als die Photonenzahl ja nicht größer als die Zahl N der ursprünglich angeregten Atome sein kann. Dieser Widerspruch löst sich aber sofort, wenn wir bedenken, daß wir eine quantentheoretische Größe durch eine klassische ersetzt haben. Wie der Vergleich mit der exakten Rechnung zeigt, wird

hier eine etwas kleinere Photonenzahl beim Maximum erreicht. Leider reichen die bisherigen exakten Rechnungen nicht aus, um zu entscheiden, wie sich dieser Unterschied bei größeren N -Werten verhält. Wesentlich günstiger ist hingegen die Wiedergabe der Oszillationsperiode. Durch das Auftreten des elliptischen Integrals in (13) wird die Bewegung nämlich nun tatsächlich rein periodisch. Für große N ($N \gg 1$) ergibt sich, wie im Anhang gezeigt wird, als Periode $(\ln \sqrt{N})/\sqrt{N}$.

Die aus der exakten numerischen Rechnung bestimmte Periode wurde mit der aus (13) folgenden für $N = 15, 39, 70, 80$ verglichen, wobei sich eine gute Übereinstimmung zeigte.

Wir können also abschließend feststellen, daß die in diesem Abschnitt besprochene Näherungsmethode auch den oszillatorischen Verlauf der Photonenzahl, von kleineren Fluktuationen abgesehen, recht gut darstellt.

Herrn H. MAIER vom Deutschen Rechenzentrum danken wir für seine wertvolle Hilfe bei der Lösung des Gleichungssystems (6).

Anhang

Um die Periodendauer zu bestimmen, nimmt man das Integral (13) an der oberen Grenze f_{\max} ; dieses Integral läßt sich nun unter Benutzung der Nullstellen des Radikanden N_b und $-N_a$ in folgender Form schreiben:

$$t_{\max} = \int_0^{\sqrt{N_b}} \frac{df}{\sqrt{(f^2 + N_a)(N_b - f^2)}} = \frac{1}{c} F(\alpha, \frac{1}{2} \pi)$$

mit $c = (N^2 + 4N)^{1/4}$ und $\sin \alpha = \sqrt{N_b}/c$. — $F(\alpha, \frac{1}{2} \pi)$ bedeutet hierbei ein elliptisches Integral erster Gattung⁹.

Für große N gilt dann

$$\begin{aligned} t_{\max} &= \frac{F(\alpha, \frac{1}{2} \pi)}{c} = \frac{K(\sin \alpha)}{c} \approx \frac{A}{c} \\ &= \frac{\ln(4/\cos \alpha)}{c} \approx \frac{\ln \sqrt{N}}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

⁹ Für die Definition von F , K , A siehe JAHNKE-EMDE, Table of Functions etc., 4th Ed. Dover, S. 52 ff.

Zur magnetischen Protonenrelaxation im System H₂O—Al₂O₃

Von SIEGFRIED REBALL und HORST WINKLER

Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität, Leipzig

(Z. Naturforschg. **19 a**, 861—866 [1964]; eingegangen am 14. März 1964)

Die magnetischen Protonenrelaxationszeiten in Wasser, das von Aluminiumoxyd (Pulver) sorbiert ist, sind in den Mikroporen und den Makroporen des Adsorbens unterschiedlich. Trotzdem zeigt die longitudinale Relaxation der gesamten Probe annähernd einphasiges Verhalten, weil die Protonen zwischen dem Mikro- und dem Makroporenwasser genügend schnell ausgetauscht werden¹. Imprägniert man das Adsorbens mit Fe₂O₃, verläuft die longitudinale Relaxation zweiphasig; denn durch das Eisenoxyd sind die longitudinalen Relaxationszeiten im Wasser der Mikro- und der Makroporen des Adsorbens verkürzt und nicht mehr groß gegen die mittleren Verweilzeiten der Protonen in den betreffenden Poren, so daß langsamer Austausch vorliegt. Für die mittlere Verweilzeit der Protonen in der Mikroporenphase läßt sich die Größenordnung 100 ms abschätzen. Entsprechende Untersuchungen an einer Mischung der beiden Aluminiumoxydsorten zeigen keinen Protonenaustausch zwischen dem Mikroporenwasser beider Adsorbenten. In diesem Zusammenhang wird auf ähnliche Arbeiten von SELWOOD und Mitarbeitern^{2, 3} eingegangen.

Existieren in einer Probe mehrere Bereiche unterschiedlicher magnetischer Relaxationszeiten derselben Kernsorte, so erfolgt die Relaxation im allgemeinen nicht in Form einer fallenden Exponentialkurve. Bei zwei Bereichen α und β insbesondere gilt^{4—6}

¹ H. WINKLER, Z. Naturforschg. **16 a**, 780 [1961].

² R. B. SPOONER u. P. W. SELWOOD, J. Amer. Chem. Soc. **71**, 2184 [1949].

³ P. W. SELWOOD u. F. K. SCHROYER, Disc. Faraday Soc. **8**, 337 [1950].

$$F(t) = P'_\alpha \exp\{-t/T'_{\alpha}\} + P'_\beta \exp\{-t/T'_{\beta}\}. \quad (1)$$

Hierbei bedeuten:

$F(t)$ die Amplitude der transversalen Komponente M_\perp oder die Abweichung $M_0 - M_z(t)$ der longitudi-

⁴ J. R. ZIMMERMAN u. W. E. BRITTIN, J. Phys. Chem. **61**, 1328 [1957].

⁵ D. E. WOESSNER, J. Chem. Phys. **35**, 41 [1961].

⁶ D. E. WOESSNER u. J. R. ZIMMERMAN, J. Phys. Chem. **67**, 1590 [1963].